



TITLE:

# 量子コホモロジーの整構造について (可積分系に関わる幾何学の研究)

AUTHOR(S):

入谷, 寛

---

CITATION:

入谷, 寛. 量子コホモロジーの整構造について (可積分系に関わる幾何学の研究). 数理解析研究所講究録 2008, 1605: 22-32

ISSUE DATE:

2008-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/139951>

RIGHT:

量子コホモロジーの整構造について  
(INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

入谷 寛  
(HIROSHI IRITANI)

ABSTRACT. We discuss integral structures in the space of solutions to quantum cohomology differential equations (quantum  $D$ -modules) associated to quantum cohomology. In mirror symmetry, the quantum  $D$ -module of a manifold  $X$  becomes isomorphic to the (semi-infinite) variation of Hodge structures (VHS for short) of the mirror. The VHS of the mirror is equipped with an integral local system, so a natural question is “what is the integral structure in the quantum  $D$ -module corresponding to the mirror?” We study this problem in the case where  $X$  is a toric orbifold and see that the integral structure coming from the mirror can be described only in terms of the  $K$ -group  $K(X)$  and a certain characteristic class ( $\hat{\Gamma}$ -class). This article is a résumé of the results on integral structures in [8].

1. 序

本稿では量子コホモロジーに付随する微分方程式系 (量子  $D$  加群) の解空間における整構造について論じる。ここで考える整構造はたとえば整数環係数のコホモロジー群  $H^*(X, \mathbb{Z})$  とは直接の関係はないが、ミラー側に移ると自然に見ることのできるいわば「隠された」整構造である。

超弦理論におけるミラー対称性によれば、Calabi-Yau 多様体  $X$  に対してあるミラー Calabi-Yau 多様体  $X^\vee$  があって、 $X$  の量子コホモロジーから定まる Hodge 構造の変動 (A 模型 VHS) と  $X^\vee$  の複素構造の変形の定める Hodge 構造の変動 (B 模型 VHS) とが同型になると予想されている。ここで、B 模型 VHS における局所系、すなわち Gauss-Manin 接続の平坦切断の空間は  $H^n(X^\vee, \mathbb{C})$  であり、整部分格子  $H^n(X^\vee, \mathbb{Z})$  を自然に含んでいる。一方、A 模型 VHS における局所系は  $X$  の量子微分方程式の解空間として定まるが、ここにはアприオリに自然な整格子は存在しないように見える。ミラー側で自然に存在する整構造を量子コホモロジー側に引き戻すとどのように見えるか、というのが本研究の動機となっている。

本稿の構成は以下のとおりである。まず軌道体量子コホモロジーを導入し、トーリック軌道体のミラーである Landau-Ginzburg 模型を記述する。次にこのトーリックのミラー (Landau-Ginzburg 模型) から引き戻される整構造を具体的に記述する。この場合、量子コホモロジーに引き戻された整構造はトーリック軌道体の位相不変量 ( $K$  群とある特別な特性類) だけによって記述される。

本稿は論文 [8] の整構造に関する結果の要約である。

2. 軌道体量子コホモロジー

本稿では一般に軌道体にたいする量子コホモロジーを考える。量子コホモロジーは種数が 0 の Gromov-Witten 理論により定義されるが、軌道体 Gromov-Witten 理論

はシンプレクティック幾何学の文脈では Chen-Ruan [5, 6] により, 代数幾何学においては Abramovich-Graber-Vistoli [1] により開発された. 軌道体コホモロジーおよびその量子コホモロジーの詳しい解説はこれらの文献に譲る.  $\mathcal{X}$  を滑らかな Deligne-Mumford stack でその coarse moduli space  $X$  が射影的であるものとする.  $I\mathcal{X}$  を  $\mathcal{X}$  の慣性スタックとする.  $I\mathcal{X}$  の点は  $\mathcal{X}$  の点  $x \in \mathcal{X}$  とその自己同型群の元  $g \in \text{Aut}(x)$  の組  $(x, g)$  で代表される. 以下では  $g$  を stabilizer と呼ぶ.  $T$  を慣性スタックの連結成分の添え字集合とし,  $I\mathcal{X}$  を次のように成分に分解する.

$$I\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in T} \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_0 \sqcup \bigsqcup_{v \in T'} \mathcal{X}_v$$

ここで,  $T = T' \sqcup \{0\}$  であり,  $\mathcal{X}_0$  は自明な自己同型  $g = 1$  に対応する  $I\mathcal{X}$  の成分をあらわし,  $\mathcal{X}_0 \cong \mathcal{X}$  である. 各慣性スタックの成分  $\mathcal{X}_v$  には age と呼ばれる有理数  $\iota_v$  が定まる. 軌道体コホモロジー  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  は

$$H_{\text{orb}}^p(\mathcal{X}) = \bigoplus_{v \in T, p-2\iota_v \in 2\mathbb{Z}} H^{p-2\iota_v}(\mathcal{X}_v)$$

で定義される. ここで  $p$  は一般に有理数である. 本稿では慣性スタック上の偶数次のコホモロジー類のみを考えることにする (すなわち  $p - 2\iota_v$  が偶数).  $\text{inv}: I\mathcal{X} \rightarrow I\mathcal{X}$  を  $(x, g)$  を  $(x, g^{-1})$  に送る対合とする.  $\text{inv}$  は添え字集合の間の写像  $\text{inv}: T \rightarrow T$  を誘導する. ここで  $\text{inv}(\mathcal{X}_v) = \mathcal{X}_{\text{inv}(v)}$  である. 軌道体 Poincaré ペアリングは次で定義される.

$$(\alpha, \beta)_{\text{orb}} = \int_{I\mathcal{X}} \alpha \cup \text{inv}^* \beta$$

種数 0 の軌道体 Gromov-Witten 理論は軌道体コホモロジー上のある  $n$  重線型な写像 (相関関数) を定める.

$$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{0,n,d}: H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}.$$

ここで,  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  は coarse moduli space  $X$  上の 2 次の整ホモロジー類である.  $\text{Eff}_{\mathcal{X}} \subset H_2(X, \mathbb{Z})$  を  $X$  内の effective curve の代表する整ホモロジー類によって生成される半群とする. Gromov-Witten 相関関数は正則曲線を数え上げる不変量であり,  $d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}}$  のときに限り 0 でない値を持つことができる. 軌道体量子コホモロジーとは軌道体コホモロジー上の可換環の構造の族  $(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}), \circ_{\tau})$  として与えられる. ここで  $\circ_{\tau}$  は  $\tau \in H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  でパラメトライズされる積であって, 種数 0 の Gromov-Witten 不変量を使って次のように定義される.

$$(\alpha \circ_{\tau} \beta, \gamma)_{\text{orb}} = \sum_{d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left\langle \alpha, \beta, \gamma, \overbrace{\tau', \dots, \tau'}^{n \text{ times}} \right\rangle_{0, n+3, d} e^{\langle \tau_{0,2}, d \rangle}.$$

ここで,  $\tau = \tau_{0,2} + \tau'$  であって  $\tau_{0,2} \in H^2(\mathcal{X}_0)$  は  $\tau$  の  $H^2(\mathcal{X}_0)$  成分をあらわす. この積  $\circ_{\tau}$  は  $\tau'$  に関しては形式的冪級数,  $\tau_{0,2}$  に関しては形式的 Fourier 級数とみなすことができる. 一般にこの級数の収束は知られていないが, 本稿では  $\circ_{\tau}$  はある開集合  $U \subset H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  上で収束すると仮定する.  $U$  は十分大きい  $M > 0$  と十分小さい  $\epsilon > 0$  に対し次のような形の領域を含む. これは極大体積極限 (large radius limit) の近傍と呼ばれる.

$$\{\tau; \Re \langle \tau_{0,2}, d \rangle < -M, \forall d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}} \setminus \{0\}, \|\tau'\| < \epsilon\}.$$

## 3. 量子微分方程式

$\{\phi_i\}_{i=1}^N$  を  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  の斉次な基底とし,  $t^i$  をこの基底に双対な  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  上の線型座標とする.  $\tau = \sum_{i=1}^N t^i \phi_i$  によって  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  の一般の点をあらわす.  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  を軌道体 Poincaré ペアリングに関して  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  と双対な基底とする. 量子微分方程式 (量子  $D$  加群) は自明なベクトル束  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \rightarrow H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  上のパラメータ  $z \in \mathbb{C}$  を持つ平坦接続  $\nabla$  により定まる.

$$(1) \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \circ \tau).$$

コホモロジーに値をとる函数  $s(\tau, z)$  に対する微分方程式  $\nabla_i s(\tau, z) = 0$  を量子微分方程式と呼ぶことにする. この平坦接続  $\nabla$  はさらにパラメータ  $z$  の方向に拡張され, ベクトル束  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times (H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}^*) \rightarrow H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}^*$  上の平坦接続  $\hat{\nabla}$  を定める.

$$(2) \quad \begin{aligned} \hat{\nabla}_i &= \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \circ \tau) \\ \hat{\nabla}_{z\partial_z} &= z\partial_z - \frac{1}{z}E \circ \tau + \mu \end{aligned}$$

ここで  $\mu \in \text{End}(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}))$  および Euler ベクトル場  $E$  は

$$\begin{aligned} \mu(\phi_i) &= \left(\frac{1}{2} \deg \phi_i - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}\right) \phi_i, \\ E &= \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\deg \phi_i}{2}\right) t^i \phi_i + c_1(\mathcal{X}), \end{aligned}$$

で与えられる. 方程式  $\hat{\nabla}s = 0$  も量子微分方程式と呼ぶ. 2 次のコホモロジー類  $\tau_{0,2} \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  の  $H_{\text{orb}}^2(\mathcal{X})$  への作用を

$$\tau_{0,2} \cdot \tau = \text{pr}^*(\tau_{0,2}) \cup \tau$$

で定義する. ここで  $\text{pr}: I\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  は自然な射影である. 量子微分方程式 (1) の基本解は gravitational descendant と呼ばれる Gromov-Witten 不変量によって与えられる.

**Proposition 3.1.**  $\text{End}(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}))$  に値をとる函数  $L(\tau, z)$  を次で定義する.

$$L(\tau, z)\phi = e^{-\tau_{0,2}/z}\phi - \sum_{(d,l) \neq (0,0), d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{l!} \left\langle \frac{e^{-\tau_{0,2}/z}\phi}{z + \psi_1}, \tau', \dots, \tau', \phi_k \right\rangle_{0,l+2,d}^{\mathcal{X}} \phi^k.$$

ここで,  $(z + \psi_1)^{-1}$  は  $z^{-1}$  の冪級数  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{-n-1} \psi_1^n$  に展開するものとする<sup>1</sup>. これは  $\nabla_i L(\tau, z)\phi = 0$  を満たし,  $\nabla$  の平坦切断の基本解を与える. さらに,  $L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi$  は  $\hat{\nabla}_i(L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi) = 0$ ,  $\hat{\nabla}_{z\partial_z}(L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi) = 0$  を満たし,  $\hat{\nabla}$  の平坦切断の基本解を与える. ここで,  $\rho := c_1(T\mathcal{X}) \in H^2(\mathcal{X})$  であり,  $z^{-\mu}z^{\rho} = e^{-\mu \log z} e^{\rho \log z}$  である.

<sup>1</sup>一般に非負整数  $k_1, \dots, k_r$  と  $\alpha_i \in H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  に対して  $\left\langle \alpha_1 \psi_1^{k_1}, \alpha_2 \psi_2^{k_2}, \dots, \alpha_r \psi_r^{k_r} \right\rangle_{0,r,d}^{\mathcal{X}}$  の形の不変量が定義され, gravitational descendant と呼ばれる.  $\psi_i$  は  $i$  番目の点での余接直線束  $\mathcal{L}_i$  の第一 Chern 類をあらわす. ここで  $\mathcal{L}_i$  は安定写像のモジュライ空間上の直線束であって, ひとつの安定写像におけるファイバーは曲線の  $i$  番目の名前つき点での余接空間で与えられる.

入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

量子微分方程式  $\hat{\nabla}_S = 0$  の解空間  $S$  にペアリング  $(\cdot, \cdot)_S$  を導入する. 量子微分方程式の解  $s_1(\tau, z), s_2(\tau, z)$  に対して

$$(s_1, s_2)_S := (s_1(\tau, e^{\pi i} z), s_2(\tau, z))_{\text{orb}}$$

とおく. ここで,  $s_1(\tau, e^{\pi i} z)$  は  $s_1(\tau, z)$  を道  $[0, 1] \ni \theta \mapsto e^{\pi i \theta} z$  に沿って解析接続したものを表す.  $s_1, s_2$  は平坦ゆえ, 右辺は  $\tau, z$  によらない複素数になる. このペアリングは一般には対称でも反対称でもないが,  $\mathcal{X}$  が Calabi-Yau ( $\rho = c_1(\mathcal{X}) = 0$ ) のときは  $\mathcal{X}$  の次元  $n$  の偶奇に応じて対称または反対称になる.

**Definition 3.2.** 軌道体量子コホモロジーにおける整構造とは量子微分方程式  $\hat{\nabla}_S = 0$  の解空間  $S$  ( $N$  次元  $\mathbb{C}$  ベクトル空間) の整格子  $S_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^N$  であって, 上のペアリング  $(\cdot, \cdot)_S$  の  $S_{\mathbb{Z}}$  への制限が  $\mathbb{Z}$  に値をとり, 完全 (perfect) ペアリングになる (同型  $S_{\mathbb{Z}} \cong \text{Hom}(S_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  を誘導する) ものと定義される.

$$(\cdot, \cdot)_S: S_{\mathbb{Z}} \times S_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

この定義だけでは整構造は一意には決まらず, この定義を満たす多くの整構造があると思われる. ここでは簡単のため省略したが, [8] では整構造に対して, 極大体積極限のまわりでの局所モノドロミーで保存される, という条件も課しており, これは整構造の強い制約を与える. (ただし, この条件を課してもやはり一意ではない.) 以下ではそのようなひとつの整構造の例を挙げる.

#### 4. 整構造の例

$K(\mathcal{X})$  を位相的な軌道体複素ベクトル束 (orbifold vector bundle; orbibundle) の Grothendieck 群とする.  $I\mathcal{X}$  上の軌道体ベクトル束  $V$  と  $I\mathcal{X}$  の成分  $\mathcal{X}_v$  に対して,  $V|_{\mathcal{X}_v}$  への  $\mathcal{X}_v$  の stabilizer の作用に関する固有分解を次のようにおく.

$$V|_{\mathcal{X}_v} = \bigoplus_{0 \leq f < 1} V_{v,f}.$$

ここで,  $\mathcal{X}_v$  の stabilizer は  $V_{v,f}$  に  $\exp(2\pi i f)$  で作用する. 軌道体複素ベクトル束に対する Chern 指標  $\text{ch}: K(\mathcal{X}) \rightarrow H^*(I\mathcal{X})$  は次で定義される.

$$\tilde{\text{ch}}(V) := \bigoplus_{v \in T} \sum_{0 \leq f < 1} e^{2\pi i f} \text{ch}((\text{pr}^* V)_{v,f})$$

ここで  $\text{pr}: I\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  は自然な射影である.  $\mathcal{X}$  上の軌道体ベクトル束  $V$  に対して,  $\delta_{v,f,i}$ ,  $i = 1, \dots, l_{v,f}$  を  $(\text{pr}^* V)_{v,f}$  の Chern roots とする. Todd 類  $\widetilde{\text{Td}}: K(\mathcal{X}) \rightarrow H^*(I\mathcal{X})$  は次で定義される.

$$\widetilde{\text{Td}}(V) = \bigoplus_{v \in T} \prod_{0 \leq f < 1, 1 \leq i \leq l_{v,f}} \frac{1}{1 - e^{-2\pi i f} e^{-\delta_{v,f,i}}} \prod_{f=0, 1 \leq i \leq l_{v,0}} \frac{\delta_{v,0,i}}{1 - e^{-\delta_{v,0,i}}}.$$

軌道体ベクトル束が正則ベクトル束の構造を持つとき, コホモロジー群  $H^i(\mathcal{X}, V)$  が定義されるが, 正則オイラー標数  $\chi(V) := \sum_{i=1}^n (-1)^i \dim H^i(\mathcal{X}, V)$  は次の川崎-Riemann-Roch 公式 [9] で与えられる.

$$(3) \quad \chi(V) = \int_{I\mathcal{X}} \tilde{\text{ch}}(V) \cup \widetilde{\text{Td}}(T\mathcal{X}).$$

$\chi(V)$  は定義から整数である.  $\mathcal{X}$  上の軌道体ベクトル束  $V$  の  $\hat{\Gamma}$  類を次で定める.

$$\hat{\Gamma}(V) := \bigoplus_{v \in T} \prod_{0 \leq f < 1} \prod_{i=1}^{l_{v,f}} \Gamma(1 - f + \delta_{v,f,i}) \in H^*(I\mathcal{X}).$$

ここで  $\delta_{v,f,i}$  は上と同じものである. 右辺に現れる Gamma 関数は  $1 - f > 0$  での Taylor 級数に展開されていると考える. また  $\hat{\Gamma}_{\mathcal{X}} := \hat{\Gamma}(T\mathcal{X})$  とおく.

ここで, 次の仮定をおく.

- (A1) 写像  $\tilde{\text{ch}}: K(\mathcal{X}) \rightarrow H^*(I\mathcal{X})$  は  $\mathbb{C}$  をテンソルすると同型になる.
- (A2) 川崎-Riemann-Roch 公式の右辺 (3) は任意の位相的な軌道体ベクトル束  $V$  に対して整数である. 一般の (正則とは限らない) 軌道体ベクトル束  $V$  に対して  $\chi(V)$  を (3) の右辺で定義する.
- (A3)  $K(\mathcal{X})$  のペアリング  $(V_1, V_2) \mapsto \chi(V_1 \otimes V_2)$  は全射  $K(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}(K(\mathcal{X}), \mathbb{Z})$  を誘導する.

これらの性質は多様体に関しては正しい. また軌道体が位相軌道体として  $M/G$  ( $M$  はコンパクト多様体,  $G$  はコンパクト Lie 群で  $G$  の  $M$  への作用の固定部分群は有限) の形を持つとき, (A1) は Adem-Ruan の分解定理 [2], (A2) は川崎による指数定理 [10] から従う.

**Definition 4.1.** 滑らかな Deligne-Mumford stack  $\mathcal{X}$  に対して条件 (A1), (A2), (A3) を仮定する.  $K$  群から量子微分方程式の解空間  $\mathcal{S}$  への写像  $\Psi$  を次で定める.

$$\Psi: K(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$[V] \longmapsto L(\tau, z) z^{-\mu} z^{\rho} \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{\Gamma}_{\mathcal{X}}(2\pi i)^{\deg/2} \text{inv}^* \tilde{\text{ch}}(V) \right).$$

ここで,  $L(\tau, z) z^{-\mu} z^{\rho}$  は Proposition 3.1 であたえた  $\hat{\nabla}$  の基本解であり,  $(2\pi i)^{\deg/2}$  は  $H^{2p}(I\mathcal{X})$  上で  $(2\pi i)^p$  倍として定義される  $\text{End}(H^*(I\mathcal{X}))$  の元である. 仮定 (A1) の下で  $\Psi(K(\mathcal{X})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathcal{S}$  であり  $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$  は  $\mathcal{S}$  の整格子を与える. 写像  $\Psi$  は

$$(\Psi(V_1), \Psi(V_2))_{\mathcal{S}} = \chi(V_1 \otimes V_2^{\vee})$$

を満たし, 解空間のペアリング  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{S}}$  は向井ペアリングに対応する. したがって仮定 (A2), (A3) の下で  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{S}}$  の  $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$  への制限は  $\mathbb{Z}$  に値をとる完全ペアリングになる. この整格子  $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$  の定める整構造を  $\hat{\Gamma}$ -整構造と呼ぶ.

写像  $\Psi$  がペアリングを保つことは川崎-Riemann-Roch とガンマ関数の函数等式  $\Gamma(1-z)\Gamma(1+z) = \pi z / \sin(\pi z)$  から従う. この函数等式は  $\hat{\Gamma}$  類が Todd 類の二乗根の類似であり,  $\Psi(V)$  は向井ベクトルの類似であることを示している. しかし,  $\hat{\Gamma}$  類は Todd 類の二乗根と異なり有理数体上定義された特性類ではない (オイラー定数  $\gamma$  やゼータ関数の値  $\zeta(3), \zeta(5), \dots$  等を含むので, おそらく超越的であろう).

## 5. トーリック軌道体

記号を定めるため, 本節ではトーリック軌道体の一つの定義を与える. トーリック軌道体を次のデータから構成したい.

- $r$  次元の代数的トーラス  $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^r$ .  $\mathbb{L} := \text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T})$  とおく.

入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

- $m$  個の (順序付けられた) 元  $D_1, \dots, D_m \in \mathbb{L}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$  で  $\mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R} = \sum_{i=1}^m \mathbb{R}D_i$  を満たすもの.
- 元  $\eta \in \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R}$ .

$D_1, \dots, D_m$  は準同型  $\mathbb{T} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^m$  を定める. トーラス  $\mathbb{T}$  をこの準同型により  $\mathbb{C}^m$  に作用させる.

$$\mathcal{A} := \{I \subset \{1, \dots, m\} ; \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{>0} D_i \ni \eta\}.$$

とおき, 商スタック  $\mathcal{X}$  を次で定める.

$$\mathcal{X} = [\mathcal{U}_\eta / \mathbb{T}], \quad \mathcal{U}_\eta := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{A}} \mathbb{C}^I,$$

ここで  $\mathbb{C}^I := \{(z_1, \dots, z_m) ; z_i = 0 \text{ for } i \notin I\}$  とおいた. このままでは  $\mathcal{X}$  はコンパクトかつ (stack の意味で) 滑らかなトーリック軌道体になるとは限らない. そこで最初のデータに次の条件を課す.

- (A)  $\{1, \dots, m\} \in \mathcal{A}$ .
- (B)  $\sum_{i \in I} \mathbb{R}D_i = \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R}$  for  $I \in \mathcal{A}$ .
- (C)  $\{(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m ; \sum_{i=1}^m c_i D_i = 0\} = \{0\}$ .

条件 (A), (B), (C) は  $\mathcal{X}$  が非空, 固定部分群が有限,  $\mathcal{X}$  がコンパクトであることにそれぞれ対応する.  $\mathcal{X}$  の次元は  $n := m - r$  である.

$D_1, \dots, D_m$  は次の完全列を定める.

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{L} \xrightarrow{(D_1, \dots, D_m)} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0,$$

ここで  $N$  は 2 番目の写像  $(D_1, \dots, D_m)$  の余核として定まる有限生成アーベル群である.  $f_1, \dots, f_m$  を  $\mathbb{Z}^m$  の標準的な基底とし,  $b_i$  を  $f_i$  の  $N$  における像  $\beta(f_i)$  とする. 必要なら番号を付け替えて,  $1 \leq i \leq m'$  に対しては  $\{1, \dots, m\} \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$  であり,  $m' < i \leq m$  に対しては  $\{1, \dots, m\} \setminus \{i\} \notin \mathcal{A}$  であると仮定する. Borisov-Chen-Smith の意味での  $\mathcal{X}$  の stacky fan は次で与えられる.

- $N$  のベクトル  $b_1, \dots, b_{m'}$ .
- 一次元錘の集合が  $\{\mathbb{R}_{\geq 0} b_1, \dots, \mathbb{R}_{\geq 0} b_{m'}\}$  に一致する  $N \otimes \mathbb{R}$  内の完備な単体的扇  $\Sigma$ .  $\sigma_I = \sum_{i \notin I} \mathbb{R}_{\geq 0} b_i$  が  $\Sigma$  の錘であることと  $I \in \mathcal{A}$  は同値.

Borisov-Chen-Smith [3] はトーリック Deligne-Mumford stack をこの stacky fan から構成した. 実は, 我々の構成は coarse moduli space が射影的である全てのトーリック Deligne-Mumford stack を与えることもわかる.

$\mathbb{L}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$  の元  $\xi$  は  $\mathcal{X}$  上の軌道体直線束  $L_\xi$  を定める.

$$L_\xi = \mathcal{U}_\eta \times \mathbb{C} / (z, a) \sim (t \cdot z, \xi(t)a), t \in \mathbb{T}.$$

対応  $\xi \mapsto L_\xi$  により全射  $\mathbb{L}^\vee \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X}) \cong H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$  が定まる. この全射の核は  $\sum_{i > m'} \mathbb{Z}D_i$  である. この全射による  $D_i \in \mathbb{L}^\vee$  の  $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  における像を  $\bar{D}_i$  であらわす. また,  $\mathbb{L}^\vee$  の整基底  $p_1, \dots, p_r$  であって  $p_{r'+1}, \dots, p_r$  が  $\sum_{i > m'} \mathbb{R}D_i \cap \mathbb{L}^\vee$  の整基底をなすものをとっておく. このときある整数成分の行列  $(m_{ia})$  に対して  $\bar{D}_i = \sum_{a=1}^{r'} m_{ia} \bar{p}_a$ ,  $1 \leq i \leq m'$  とかける. ここで同様に  $\bar{p}_a \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  は  $p_a \in \mathbb{L}^\vee$  の像である.

$\mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}$  の部分集合  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}_{\text{eff}}$  を次で定める.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &= \{d \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q} ; \{i \in \{1, \dots, m\} ; \langle D_i, d \rangle \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{A}\}, \\ \mathbb{K}_{\text{eff}} &= \{d \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q} ; \{i \in \{1, \dots, m\} ; \langle D_i, d \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \in \mathcal{A}\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{K}$  および  $\mathbb{K}_{\text{eff}}$  は足し算では閉じていないが,  $\mathbb{K}$  には  $\mathbb{L}$  が作用する. 次の集合  $\text{Box}$  を定義する.

$$\text{Box} = \{v \in N ; v = \sum_{k \notin I} c_k b_k \text{ in } N \otimes \mathbb{Q}, c_k \in [0, 1), I \in \mathcal{A}\}.$$

$d \in \mathbb{K}$  は  $\text{Box}$  の元  $v(d)$  を定める.

$$v(d) := \sum_{i=1}^m [\langle D_i, d \rangle] b_i \in N.$$

この写像  $d \mapsto v(d)$  は  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}/\mathbb{L}$  を通じて分解し, これにより  $\mathbb{K}/\mathbb{L}$  と  $\text{Box}$  は同一視される.  $v(d) \in \text{Box}$  は慣性スタック  $I\mathcal{X}$  の成分  $\mathcal{X}_{v(d)}$  を定める.

$$\mathcal{X}_{v(d)} = \{[z_1, \dots, z_m] \in \mathcal{X} ; z_i = 0 \text{ if } \langle D_i, d \rangle \notin \mathbb{Z}\}$$

$\mathcal{X}_{v(d)}$  の stabilizer は  $\exp(-2\pi\sqrt{-1}d) \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{C}^* \cong \mathbb{T}$  により与えられるものと定義する.  $\mathcal{X}_{v(d)}$  は  $d$  のとり方によらず,  $\text{Box}$  の元  $v(d)$  のみに依存して決まる.  $\mathcal{X}_{v(d)}$  の age は

$$\iota_{v(d)} := \text{age}(\mathcal{X}_{v(d)}) = \sum_{i=1}^m \{-\langle D_i, d \rangle\} = \sum_{i=1}^{m'} \{-\langle D_i, d \rangle\}.$$

で与えられ,

$$I\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in \text{Box}} \mathcal{X}_v, \quad H_{\text{orb}}^i(\mathcal{X}) = \bigoplus_{v \in \text{Box}} H^{i+2\iota_v}(\mathcal{X}_v)$$

である.  $H^*(\mathcal{X}_v)$  は単位元  $1_v \in H^*(\mathcal{X}_v)$  により 2 次のコホモロジー類  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{m'} \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  の作用で生成される.

## 6. LANDAU-GINZBURG 模型

完全列 (4) に完全関手  $\text{Hom}(-, \mathbb{C}^*)$  を適用して完全列

$$(5) \quad 1 \longrightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{C}^*) \longrightarrow Y := (\mathbb{C}^*)^m \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{M} := \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 1$$

を得る. 前節で定義したトーリック軌道体にミラー双対な Landau-Ginzburg 模型は左から 3 番目の射  $\text{pr}: Y \rightarrow \mathcal{M}$  によって与えられる代数的トーラスの族と次のポテンシャル関数  $W: Y \rightarrow \mathbb{C}$  の組である.

$$W = w_1 + \dots + w_m, \quad (w_1, \dots, w_m) \in (\mathbb{C}^*)^m = Y.$$

ポテンシャル  $W$  は  $\text{pr}$  の各ファイバーに制限すると Laurent 多項式を与える.  $\mathbb{L}^\vee$  の基底  $p_1, \dots, p_r$  に双対な  $\mathcal{M} = \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{C}^*) = \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^*$  値の座標を  $q_1, \dots, q_r$  とおく. 射影  $\text{pr}$  のファイバーを  $Y_q = \text{pr}^{-1}(q)$  とおき,  $W_q = W|_{Y_q}$  とおく.  $Y_q$  は  $|N_{\text{tor}}|$  個の連結成分からなり, 各々は  $\text{Hom}(N_{\text{free}}, \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^n$  と同型である. ここで  $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$ . 完全列 (5) は一般には分裂しないが,  $\text{pr}$  の多価な切断  $(q_1, \dots, q_r) \mapsto (q^{\ell^1}, \dots, q^{\ell^m})$  をとることができる. ここで  $q^{\ell^i} = \prod_{a=1}^r q^{\ell_{ia}^i}$  であり,  $\ell_{ia}^i$  は一般には有理数である.  $N_{\text{free}}$  の任意の基底  $e_1, \dots, e_n$  を取り,  $y_1, \dots, y_n$  を  $\text{Hom}(N_{\text{free}}, \mathbb{C}^*)$  の対応する座標と



入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

する. これは平行移動により  $Y_q$  の各連結成分の座標を与える. さらに,  $N_{\text{free}}$  において  $b_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j$  が成り立つとする. このとき  $W_q$  は以下の表示を持つ.

$$(6) \quad W_q = W|_{Y_q} = q^{\ell_1} y^{b_1} + \cdots + q^{\ell_m} y^{b_m}, \quad q^{\ell_i} = \prod_{a=1}^r q_a^{\ell_{ia}}, \quad y^{b_i} = \prod_{j=1}^n y_j^{b_{ij}}.$$

ここで多価関数  $q^{\ell_i}$  の枝は  $Y_q$  の連結成分に依存することに注意されたい.

次にある Zariski 開な部分集合  $\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{M}$  が存在して, Landau-Ginzburg 模型は  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  上の局所系を定めることを説明する.

**Definition 6.1.**  $\hat{S}$  を  $b_1, \dots, b_m \in N \otimes \mathbb{R}$  の凸包として得られる多面体とする. Laurent 多項式  $W_q(y)$  (6) が無限遠で非退化であるとは  $\hat{S}$  の余次元が 1 以上の全ての面  $\Delta$  に対して  $W_{q,\Delta}(y) := \sum_{b_i \in \Delta} q^{\ell_i} y^{b_i}$  が  $y \in (\mathbb{C}^*)^n$  上で臨界点を持たないことである.  $W_q$  が無限遠で非退化であるような  $q$  全体のなす  $\mathcal{M}$  の部分集合を  $\mathcal{M}^\circ$  とおく.

点  $(q, z) \in \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  に対して次の相対ホモロジー群を考える.

$$R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee := H_n(Y_q, \{y \in Y_q; \Re(W_q(y)/z) < M\}; \mathbb{Z}), \quad M \ll 0$$

ここで右辺は十分小さい  $M$  のとり方によらない. 生成的な  $q$  に対しては  $y \mapsto \Re(W_q(y)/z)$  は  $Y_q$  上の Morse 関数を与え, 各臨界点の指数は  $n$  である. また Kouchnirenko の定理 [11] により, 臨界点の個数  $N$  は  $\hat{S}$  の体積に  $n!|N_{\text{tor}}|$  をかけたものに等しい. 全ての臨界値の虚部が互いに異なるとき,  $R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee$  は各臨界点  $\sigma \in Y_q$  の不安定多様体  $\Gamma_\sigma$ :

$$\Gamma_\sigma = \{y \in Y_q; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = \sigma\}, \quad \phi_t(y) \text{ は } \Re(W_q(y)/z) \text{ の勾配流}$$

たちによって生成される自由アーベル群  $\bigoplus_\sigma \mathbb{Z}\Gamma_\sigma$  である. これらの相対ホモロジーを束ねてできる  $R_{\mathbb{Z}} := \bigcup_{(q,z) \in \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*} R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee$  は  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  上のランク  $N$  の局所系をなすことが示される. ただし  $y \mapsto \Re(W_q(y)/z)$  は固有写像ではないので, モース理論を使うためにはいわゆる Palais-Smale 条件を検証しないといけない. 実際  $q \notin \mathcal{M}^\circ$  の時は,  $Y_q$  の無限遠に逃げるサイクルがありモース理論がうまく働かない.

相対ホモロジーの間の交差形式は次の完全ペアリングを定める.

$$R_{\mathbb{Z},(q,-z)}^\vee \times R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee \rightarrow \mathbb{Z}.$$

$R_{\mathbb{Z},(q,z)} = \text{Hom}(R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee, \mathbb{Z})$  とおき,  $R_{\mathbb{Z}}$  を  $R_{\mathbb{Z}}^\vee$  に双対な局所系とする. 上記のペアリングは完全ペアリング  $R_{\mathbb{Z},(q,-z)} \times R_{\mathbb{Z},(q,z)} \rightarrow \mathbb{Z}$  を誘導する.  $R_{\mathbb{Z}}$  は  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  上の局所自由層  $\mathcal{R}$  と可積分接続  $\hat{\nabla}$  を定める.

$\mathcal{R} = R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*}$ ,  $\hat{\nabla} =$  局所系  $R$  の定める  $\mathcal{R}$  の可積分接続.

ここで  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*}$  は解析的構造層である. 振動積分は  $\mathcal{R}$  の特別な切断  $\zeta$  を定める.

$$(7) \quad \zeta: R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee \ni \Gamma \mapsto \frac{1}{(-2\pi z)^{n/2}} \frac{1}{|N_{\text{tor}}|} \int_\Gamma e^{W_q(y)/z} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*}.$$

**Proposition 6.2.**  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  上の局所自由層  $\mathcal{R}$  は  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$  上の局所自由層  $\mathcal{R}^{(0)}$  に拡張され, (7) に与えた切断  $\zeta$  は  $\mathcal{R}^{(0)}$  の切断に拡張される.  $\mathcal{R}^{(0)}$  上の可積分接続  $\hat{\nabla}$  は  $\mathcal{M}^\circ \times \{0\}$  に沿って高々 2 位の極を持つ<sup>2</sup>. また  $R_{\mathbb{Z}}$  のペアリングは  $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$  上で正則なペアリン

<sup>2</sup>Poincaré rank 1 の接続とも呼ばれる. 局所枠で接続を表示したときにその主要部が  $(A_2 z^{-2} + A_1 z^{-1})dz$  の形をとることである.

量子コホモロジーの整構造について (INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

$\mathcal{G}(-)^*\mathcal{R}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}}} \mathcal{R}^{(0)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}}$  に拡張される. ここで  $(-): \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$  は  $(q, z)$  を  $(q, -z)$  に写す写像.

$\mathcal{R}$  の  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$  への拡張  $\mathcal{R}^{(0)}$  は Landau-Ginzburg 模型の定める半無限 Hodge 構造の変形において最も本質的な情報である. 以下に述べるミラー対称性ではこの拡張  $\mathcal{R}^{(0)}$  と量子  $D$  加群とが同一視される.  $\mathcal{R}^{(0)}$  の  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  への制限  $\mathcal{R}$  は整数上の局所系を自然に含んでいるので, その整構造を量子コホモロジー側に引き戻すことができる.

## 7. ミラー対称性と引き戻された整構造

$I$  函数と呼ばれる  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  に値をとる  $\mathcal{M}^\circ$  上の多価函数を次で定める.

$$I(q, z) = e^{\sum_{a=1}^r \bar{p}_a \log q_a / z} \sum_{d \in \mathbb{K}_{\text{eff}}} q^d \frac{\prod_{i; \langle D_i, d \rangle < 0} \prod_{\langle D_i, d \rangle \leq \nu < 0} (\bar{D}_i + (\langle D_i, d \rangle - \nu)z)}{\prod_{i; \langle D_i, d \rangle > 0} \prod_{0 \leq \nu < \langle D_i, d \rangle} (\bar{D}_i + (\langle D_i, d \rangle - \nu)z)} \mathbf{1}_{\nu(d)}.$$

ここで,  $d \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}$  に対して  $q^d = q_1^{(p_1, d)} \cdots q_r^{(p_r, d)}$  であり,  $\nu$  は整数を動く. また,  $(q_1, \dots, q_r)$  は前節に与えた  $\mathcal{M}$  の座標である. ミラー対称性を述べるためにトーリック軌道体に次の条件を課す.

(D)  $\hat{\rho} := D_1 + \cdots + D_m \in \mathbb{L}^\vee$  は任意の  $I \in \mathcal{A}$  に対して  $\hat{\rho} \in \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} D_i$  を満たす.

**Proposition 7.1.** 条件 (D) の下で  $I$  函数は  $q$  の級数として収束冪級数であり, 次の展開を持つ.

$$I(q, z) = 1 + \frac{\tau(q)}{z} + O(z^{-2}).$$

ここで,  $\tau(q)$  は  $\mathcal{M}^\circ$  のある開集合  $U'$  で収束する  $H_{\text{orb}}^{\leq 2}(\mathcal{X})$  値の多価函数.

量子コホモロジーに付随する量子微分方程式は  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^*}$  上の可積分接続  $\hat{\nabla}$  (2) により定義されたことを思い出そう. ここで,  $U$  は量子積が収束する  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$  の開集合であった. この可積分接続は (自明な方法で)  $U \times \mathbb{C}$  上の  $z = 0$  に沿って 2 次の極を持つ有理形接続  $\hat{\nabla}$  に拡張される. トーリック軌道体に対するミラー対称性は次のように述べられる.

**Conjecture 7.2.**  $\mathcal{X}$  を条件 (D) を満たすデータから定義されるトーリック軌道体とする.  $(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}, \hat{\nabla})$  を  $\mathcal{X}$  の量子微分方程式を定める可積分接続とし,  $(\mathcal{R}^{(0)}, \hat{\nabla})$  を  $\mathcal{X}$  にミラー双対な Landau-Ginzburg 模型の定める  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$  上の可積分接続とする.  $I$  函数の  $z$  展開の  $z^{-1}$  の係数が定める多価写像を  $\tau: \mathcal{M}^\circ \supset U' \rightarrow H_{\text{orb}}^{\leq 2}(\mathcal{X})$  とおく. 必要なら  $U'$  を小さくとり  $\tau(U') \subset U$  としてよい. 次の同型  $\text{Mir}$  が存在する.

$$\text{Mir}: (\mathcal{R}^{(0)}, \hat{\nabla})|_{U' \times \mathbb{C}} \cong \tau^*(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}, \hat{\nabla})$$

$\text{Mir}$  は  $\mathcal{R}^{(0)}$  の切断  $\zeta$  を  $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}$  の単位元切断 1 に写し, かつ  $\text{Mir}$  が誘導する  $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$  上の局所系間の同型  $\text{Mir}: R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}$  はペアリングを保つ. さらに, Proposition 3.1 に与えた基本解  $L(\tau, z)$  に対して

$$I(q, z) = L(\tau(q), z)^{-1}(1) = L(\tau(q), z)^{-1}(\text{Mir}(\zeta))$$

が成り立つ.

$\tau$  は多価写像であるが, 量子  $D$  加群  $(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}, \hat{\nabla})$  の自己同型があるため  $\tau$  による引き戻しは well-defined になっている.

入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

**Theorem 7.3.** *Conjecture 7.2 が成立すると仮定する.  $\mathcal{X}$  を条件 (D) を満たすデータから定義されるトーリック軌道体とし,  $\mathcal{X}$  は 4 節の仮定 (A3) を満たすとする. ミラー同型  $\text{Mir}: R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \cong S$  の与える  $S$  の整格子  $\text{Mir}(R_{\mathbb{Z}})$  は Definition 4.1 における  $\hat{\Gamma}$ -整構造  $S_{\mathbb{Z}}$  と一致する.*

証明の最も鍵となるステップは  $I$  関数と振動積分を比較することである.  $\mathcal{M}$  の実部を  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} := \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{R}_{>0})$  とおく.  $q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  に対してはファイバー  $Y_q$  は実部分多様体  $\Gamma_{\mathbb{R}} := \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{>0})$  を含み,  $z < 0$  のとき相対ホモロジーの元  $[\Gamma_{\mathbb{R}}] \in R_{\mathbb{Z},(q,z)}^{\vee}$  を与える.  $q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  かつ  $z < 0$  のとき次が成り立つ.

$$\zeta(\Gamma_{\mathbb{R}}) = \int_{I\mathcal{X}} H(q, z) \cup \widetilde{\text{Td}}(T\mathcal{X}), \quad H(q, z) := (2\pi)^{n/2} \text{inv}^*(2\pi i)^{-\frac{\deg}{2}} \hat{\Gamma}_{\mathcal{X}}^{-1}(z^{-\rho} z^{\mu} I(q, z)).$$

ここで左辺の  $\zeta(\Gamma_{\mathbb{R}})$  は (7) で与えられる振動積分. 右辺は  $H(q, z)$  と構造層  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  の向井ペアリングに等しいので, この等式はホモロジカルミラー対称性において  $Y_q$  の Lagrangian  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  が構造層  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  に対応することを示唆している.  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  は  $Y_q$  の Lagrangian torus fibration  $|\cdot|: Y_q \rightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{>0})$  (絶対値を取る写像) における Lagrangian section とみなすと, この対応は Strominger-Yau-Zaslow の描像と合致する.

$K$  群とミラーに現れる整構造との関係は細野 [7] および Borisov-Horja [4] などにおいてもすでに指摘されている. たとえば, 細野 [7] で指摘されている  $\mathbb{P}^4$  内の 5 次超曲面の量子微分方程式の整構造はここで挙げた  $\hat{\Gamma}$ -整構造と一致しているようである. また, Borisov-Horja では非コンパクトなトーリック Calabi-Yau 多様体の場合に  $K$  群の複素化を対応する GKZ 系の解空間と同一視し, さらに  $K$  群の間の Fourier-Mukai 変換が GKZ 系の解析接続に対応することを示している.

## REFERENCES

1. Abramovich, Dan; Graber, Tom; Vistoli, Angelo *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks*. preprint, arXiv:math.AG/0603151.
2. Adem, Alejandro; Ruan, Yongbin *Twisted orbifold K-theory* Comm. Math. Phys. 237 (2003), no. 3, pp.533–556.
3. Borisov, Lev A.; Chen, Linda; Smith, Gregory G. *The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks*. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 1, pp.193–215.
4. Borisov, Lev A.; Horja, R. Paul *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms*. Adv. Math. 207 (2006), no. 2, pp.876–927.
5. Chen, Weimin; Ruan, Yongbin, *A new cohomology theory of orbifold*. Comm. Math. Phys. B 359 (1991) no.1, pp.1–31.
6. Chen, Weimin; Ruan, Yongbin *Orbifold Gromov-Witten theory*. Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp.25–85.
7. Hosono, Shinobu *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry*. Mirror symmetry. V, pp.405–439, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
8. Iritani, Hiroshi *Real and integral structures in quantum cohomology I: toric orbifolds*. preprint, math.AG/0712.2204.
9. Kawasaki, Tetsuro, *The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds*. Osaka J. Math., 16, 1979, pp.151–159.
10. Kawasaki, Tetsuro, *The index of elliptic operators over V-manifolds*. Nagoya Math. J., 84, 1981, pp.135–157.
11. Kouchnirenko, A. G., *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*. Invent. Math. 32 (1976), no. 1, pp.1–31.

量子コホモロジーの整構造について (INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学研究院

*E-mail address:* iritani@math.kyushu-u.ac.jp